TƏBİƏT VƏ TEXNİKA ELMLƏRİ BÖLMƏSİ

УДК 517.983

О НЕКОТОРЫХ ОЦЕНКАХ НОРМ ОПЕРАТОРОВ ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Сахиб Мустафа оглу Мустафаев
доктор философии по физико-математике, доцент
Мингячевирский государственный университет

Малахат Фаррух кызы Исмаилова
доктор философии по математике, доцент
Мингячевирский государственный университет

Резюме

Найдены алгебраические условия, которые обеспечивают существование и единственность регулярного решения во всем пространстве R^2. Эти условия выражены в терминах коэффициентов данного операторно-дифференциального уравнения. Получены оценки норм операторов промежуточных производных в пространствах типа Соболева. Эти оценки связываются условиями разрешимости уравнений. В статье доказано, что оператор P_0 непрерывен и осуществляет изоморфизм между пространствами $W_2^n(R^2;H)$ и $L_2(R^2;H)$.

Ключевые слова: *операторно-дифференциальное уравнение, гильбертово пространство, множество, вектор-функция, изоморф, норма, самосопряженный оператор, промежуточные производные, регулярное решение*

Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство, A – положительно определений самосопряженный оператор в H, а

$$R = R^2 = \{(x,y) : x \in R, y \in R, R = (-\infty,\infty)\}.$$

Обозначим через $L_2(R^2;H)$ гильбертово пространство вектор-функций, определенные в R^2 почти всюду, со значениями из H, для которых [1].

$$\|f\|_{L_2(R^2;H)} = \left(\iint_{R^2} \|f(x,y)\|^2 dxdy\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

Предположим, что $D^n(R^2;H)$ – множество бесконечно дифференцируемых вектор-функций $u(x,y)$ определенные в R^2, со значениями из $H = D(A^n)$ с компактными носителями в R^2. В этом линейном множестве определим норму

$$\|u\|_{W_2^n(R^2;H)}=\left(\left\|\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right\|^2_{L_2(R^2;H)}+\left\|\frac{\partial^n u}{\partial y^n}\right\|^2_{L_2(R^2;H)}+\left\|A^n u\right\|^2_{L_2(R^2;H)}+\sum_{\substack{k+j\le \overline{n} \\ k,j=\overline{0,n}}}\left\|A^{n-(k+j)}\frac{\partial^{k+j}u}{\partial x^k\partial y^j}\right\|^2_{L_2(R^2;H)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Линейное множество $D^n(R^2;H)$ относительно этой нормы является предгильбертовым пространством, пополнение которого обозначим через $D^n(R^2;H)$ [1].

В пространстве H рассмотрим операторно-дифференциальное уравнение $n=2m$-го порядка

$$(-1)^n\frac{\partial^n u}{\partial x^n}+(-1)^n\frac{\partial^n u}{\partial y^n}+A^n u+\sum_{\substack{k,j=0\\0\le k+j\le n}}^{n}A_{k,j}\frac{\partial^{k+j}u}{\partial x^k\partial y^j}=f(x,y),\qquad (x,y)\in \boldsymbol{R}^2, \tag{1}$$

где A – положительно определенный самосопряженный оператор, а $A_{k,j}$ – линейные операторы в Н.

Определение. *Если при любой* $f(x,y)\in L_2(R^2;H)$ *существует вектор-функция* $u(x,y)\in W_2^n(R^2,H)$, *которая удовлетворяет уравнению (1) почти всюду в* R^2 *и неравенству*

$$\|u\|_{W_2^n(R^2;H)}\le const\|f\|_{L_2(R^2;H)},$$

то $u(x,y)$ *будем называть регулярным решением уравнения* (1), *а уравнение* (1) *регулярно разрешимым уравнением.*

В данной статье мы находим условия на коэффициенты операторно-дифференциального уравнения (1), которые обеспечивают регулярную разрешимость данного уравнения.

Для обыкновенных операторно-дифференциальных уравнений второго порядка аналогичная задача рассмотрена в [2], а для операторно-дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных в [3].

Введем следующие обозначения:

$$P_0u=\frac{\partial^n u}{\partial x^n}+\frac{\partial^n u}{\partial y^n}+A^n u,\qquad u(x,y)\in W_2^n(R^2,H)$$

$$P_1u=\sum_{\substack{k.j=0\\k+j\le n}}^{n}A_{kj}\frac{\partial^{k+j}u}{\partial x^k\partial y^j},\qquad u(x,y)\in W_2^n(R^2,H)$$

$$\boldsymbol{Pu}=\boldsymbol{P_0u}+\boldsymbol{P_1u},\qquad u(x,y)\in W_2^n(R^2,H)$$

Сперва, докажем.

Лемма 1. Оператор P_0 изоморфно отображает пространство $\boldsymbol{W_2^n(R^2,H)}$ *на* $L_2(R^2;H)$.

Доказательство: Пусть $f(x,y)\in L_2(R^2;H)$, а $\hat{f}(\xi,\eta)$ ее преобразование Фурье. Тогда вектор-функция

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{R^2}\left(\xi^n E+\eta^n E+A^n\right)^{-1}\hat{f}(\xi,\eta)e^{i(\xi x+\eta y)}d\xi d\eta\equiv\frac{1}{2\pi}\int_{R^2}\hat{u}(\xi,\eta)e^{i(\xi x+\eta y)}d\xi d\eta \tag{2}$$

удовлетворяет уравнению (1) почти всюду [5]. Покажем, что она является и регулярным решением, т.е. $u(x,y)\in W_2^n(R^2,H)$. Из теоремы Планшереля вытекает: достаточно показать, что $A^n\hat{u}(\xi,\eta)$, $\xi^n\hat{u}(\xi,\eta)$, $\eta^n\hat{u}(\xi,\eta)$ и $A^{n-(k+j)}\xi^k\eta^j\ \hat{u}(\xi,\eta)\in W_2^n(R^2;H)$ $(k+j\le n-1)$.

Так как

$$\left\|A^n\hat{u}(\xi,\eta)\right\|^2_{L_2(R^2;H)}=\left\|A^n\left(\xi^nE+\eta^nE+A^n\right)^{-1}f(\hat{\xi},\eta)\right\|_{L_2(R^2;H)}\le$$
$$\le\sup_{(\xi,\eta)\in R^2}\left\|A^n\left(\xi^nE+\eta^nE+A^n\right)^{-1}\right\|\cdot\left\|\hat{f}(\xi,\eta)\right\|, \tag{3}$$

то мы оценим норму $\left\|A^n\left(\xi^nE+\eta^nE+A^n\right)^{-1}\right\|$ при $(\xi,\eta)\in R^2$. Из спектрального разложения A следует, что

$$\left\|A^n\left(\xi^nE+\eta^nE+A^n\right)^{-1}\right\|=\sup_{\mu\in\tau(A)}\left|\mu^n\left(\xi^n+\eta^n+\mu^n\right)^{-1}\right|<1.$$

Таким образом, из (3) следует, что $A^n\hat{u}(\xi,\eta)\in L_2(R^2;H)$.

Аналогично доказывается, что $\xi^n\hat{u}(\xi,\eta)$, $\eta^n\hat{u}(\xi,\eta)\in L_2(R^2;H)$.

Очевидно, что

$$\left\|A^{n-(k+j)}\xi^k\eta^j\hat{u}(\xi,\eta)\right\|_{L_2(R^2;H)}=\left\|A^{n-(k+j)}\xi^k\eta^j\left(\xi^nE+\eta^nE+A^n\right)^{-1}\hat{f}(\xi,\eta)\right\|_{L_2(R^2;H)}\le$$
$$\le\sup_{(\xi,\eta)\in R^2}\left\|A^{n-(k+j)}\xi^k\eta^j\left(\xi^n+\eta^n+A^n\right)^{-1}\right\|\cdot\left\|\hat{f}(\xi,\eta)\right\|_{L_2(R^2;H)} \tag{4}$$

Так как

$$\left\|A^{n-(k+j)}\xi^k\eta^j\left(\xi^n+\eta^n+A^n\right)^{-1}\right\|=\sup_{\mu\in\tau(A)}\left\|\mu^{n-(k+j)}\xi^k\eta^j\left(\xi^n+\eta^n+\mu^n\right)^{-1}\right\|\le$$
$$\le\frac{\left(n^2-n(k+j)\right)^{\frac{n-(k+j)}{n}}}{(kj)^{\frac{k+j}{n}}\left(n^2-n(k+j)+(n-2)kj\right)},$$

то из (4) следует, что $A^{n-(k+j)}\xi^k\eta^j\hat{u}(\xi,\eta)\in L_2(R^2;H)$, следовательно, $u(x,y)$ является регулярным решением уравнения (1).

Так как $P_0u=0$ имеет только нулевое решение и

$$\|P_0u\|^2_{L_2(R^2;H)}\le(n-2)\left(\left\|\frac{\partial^nu}{\partial x^n}\right\|^2_{L_2(R^2;H)}+\left\|\frac{\partial^nu}{\partial y^n}\right\|^2_{L_2(R^2;H)}+\left\|A^nu\right\|^2_{L_2(R^2;H)}\right)^2\le(n-2)\|u\|^2_{W_2^n(R^2;H)},$$

то утверждение леммы следует из теоремы Банаха об обратном операторе [6].

Лемма 2. Пусть A – положительно определенный самосопряженный оператор, а операторы $i\,A_{k,j}$ $(k+j=2l,l=0,1,2)$ и $A_{k,j}$ $(k+j=2l-1,l=1,2)$ – симметрические операторы в H, причем $D(A_{k,j})\supset D(A^{n-(k+j)})$. Тогда $P_1:W_2^n(R^2;H)\to L_2(R^2;H)$ ограниченный оператор [7].

Доказательство: Так как операторы $iA_{k,j}$ $(k+j=2l)$ и $A_{k,j}$ $(k+j=2l-1)$ симметричные операторы, то они являются замыкаемыми операторами. Тогда из теоремы о замкнутом графике следует, что при $\varphi\in D(A^{n-(k+j)})$ имеет место неравенство $\|A_{k,j}\varphi\|\le const\|A^{n-(k+j)}\varphi\|$ [4]. Следовательно,

$$\left\| A_{k,j}\frac{\partial^{k+j}u}{\partial x^k\partial y^j}\right\|_{L_2\left(R^2;H\right)}\le const\left\| A^{n-(k+j)}\frac{\partial^{k+j}u}{\partial x^k\partial y^j}\right\|_{L_2(R^2;H)}\le const\|u\|_{W_2^n\left(R^2;H\right)}.$$

Лемма доказана.

Теорема. Пусть выполняются условия леммы 2. Тогда при $(\xi,\eta)\in R^2$ имеет место оценка [8]

$$\sum_{j=0}^{n}\left(1+|\xi|+|\eta|\right)^j\left\|A^{n-j}P^{-1}(i\xi,i\eta)\right\|\le const\,, \tag{5}$$

где $P(i\xi,i\eta)=P_0(i\xi,i\eta)+P_1(i\xi,i\eta)$,

$$P_0(i\xi,i\eta)=\xi^nE+\eta^nE+A^n\,,\quad P_1(i\xi,i\eta)=\sum_{\substack{k+j\le n\\ k,j=\overline{0,n}}}A_{k,j}i^{k+j}\xi^k\eta^j$$

Доказательство: Пусть $\psi\in D(A^n)$, $(\xi,\eta)\in R^2$, тогда из симметричности операторов $iA_{k,j}$ $(k+j=2l,l=0,1,2)$ и $A_{k,j}$ $(k+j=2l-1,l=1,2)$ следует, что $(P_1(i\xi,i\eta)\psi,\psi)$ – чисто мнимое число. Поэтому

$$\left|(P(i\xi,i\eta)\psi,\psi)\right|=\left|(P_0(i\xi,i\eta)\psi,\psi)+(P_1(i\xi,i\eta)\psi,\psi)\right|\ge(P_0(i\xi,i\eta)\psi,\psi)=$$
$$=\left(\left(\xi^nE+\eta^nE+A^n\right)\psi,\psi\right)\ge\left(\xi^n+\eta^n+\mu_0^n\right)\|\psi\|^2,$$

где μ_0 есть $\inf\limits_{\mu\in\tau(A)}\mu$. Отсюда следует, что

$$\|P(i\xi,i\eta)\psi\|\cdot\|\psi\|\ge\left(\xi^n+\eta^n+\mu_0^n\right)\|\psi\|^2,$$

т.е. $P^{-1}(i\xi,i\eta)$ существует и $\left\|P^{-1}(i\xi,i\eta)\right\|\le\left(\xi^n+\eta^n+\mu_0^n\right)^{-1}$,

т.е.

$$\left(\xi^n+\eta^n+\mu_0^n\right)\left\|P^{-1}(i\xi,i\eta)\right\|\le const \tag{6}$$

Покажем, что

$$\left\|A^nP^{-1}(i\xi,i\eta)\right\|\le const$$

Пусть $y\in H$. Тогда $A^{-n}y\in D\left(A^n\right)$ и

$$\begin{aligned}&\left|\left(P(i\xi,i\eta)A^{-n}y,A^{-n}y\right)\right|\ge\left(P_0(i\xi,i\eta)A^{-n}y,A^{-n}y\right)=\left(\left(\xi^nE+\eta^nE+A^n\right)A^{-n}y,A^{-n}y\right)=\\&=\xi^n\left\|A^{-n}y\right\|^2+\eta^n\left\|A^{-n}y\right\|^2+\left(y,A^{-n}y\right)\ge\left(y,A^{-n}y\right)\end{aligned} \tag{7}$$

Из (7) следует, что

$$\left(y,A^{-n}y\right)\le\left|\left(P(i\xi,i\eta)A^{-n}y,A^{-n}y\right)\right|\ge\left\|P(i\xi,i\eta)A^{-n}y\right\|\cdot\left\|A^{-n}y\right\|\le\left\|P(i\xi,i\eta)A^{-n}y\right\|\cdot$$
$$\cdot\left\|A^{-n}\right\|\cdot\|y\|$$

Тогда

$$\sup_{\|y\|=1}\left(y,A^{-n}y\right)\le\sup_{\|y\|=1}\left\|P(i\xi,i\eta)A^{-n}y\right\|\cdot\left\|A^{-n}\right\|,$$

т.е.

$$\left\|A^{-n}\right\|\le\sup_{\|y\|=1}\left\|P(i\xi,i\eta)A^{-n}y\right\|\cdot\left\|A^{-n}\right\|.$$

Отсюда следует, что

$$\sup_{\|y\|=1}\left\|P(i\xi,i\eta)A^{-n}y\right\|\ge1\cdot$$

Следовательно

$$\left\| A^n P^{-1}(i\xi, i\eta) \right\| \le 1.$$

Из неравенств (6) и (7) следует верность неравенства (5).

Теорема доказана.

Список использованной литературы

1. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971, 371 с.
2. Якубов С.Я. Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения. Баку: Элм, 1985, 220 с.
3. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, М.: Наука, 1967, 464 с.
4. Yagubova Kh.V. On the solvability of one class operator-differential equations in whole space // Transactions of Academy of Sciences of Azerbaijan, ser. of phyz., tech., and math., sciences, 2000, vol.XX, №4, pp.215-222
5. Ismailova M.F. On the solvability of one class of fourth order elliptic type operator–differential equations // Proceedings IMM of NAS of Azerbaijan, 2005, vol.23, pp.53-58
6. Исмаилова М.Ф. Исследование разрешимости операторно-дифференциальных уравнений четвертого порядка в частных производных. Автореферат диссертации. Баку, 2011, 22 с.
7. Исмаилова М.Ф. Об обобщенных решениях некоторых операторно-дифференциальных уравнений четвертого порядка эллиптического типа / Материалы XXV международной научно-практической конференции, СПб., 2019, с.75-79
8. Исмаилова М.Ф. Исследование разрешимости операторно-дифференциальных уравнений (в частных производных), Монография. Германия: LAMBERT Academıc Publishing, 2019, 131 с.

Mustafayev S. M.
fizika-riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru, dosent, Mingəçevir Dövlət Universiteti

İsmayılova M. F.
riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru, dosent, Mingəçevir Dövlət Universiteti

Yüksək tərtibli xüsusı törəməli operator-diferensial tənliklərdə operator normasının qiymətləndirilməsi haqqında

Xülasə

Məqalədə bütün R^2 fəzasında requlyar həllin varlığı və yeganəliyi haqqında cəbri şərtlər tapılmışdır. Bu şərtlər verilmiş operator-diferensial tənliyin əmsalları ilə ifadə olunur. Eyni zamanda Sobolev tipli fəzalarda aralıq törəmələrin operatorlarının normaları üçün qiymətləndirmələr alınmışdır. Bu qiymətləndirmələr tənliklərin həll olunabilmə şərtləri ilə əlaqələndirilir. Elmi məqalədə P_0 operatorun məhdud və $W_2^4(R^2;H)$ fəzasından $L_2(R^2;H)$ fəzasına izomorf inikas olduğu isbat edilmişdir.

Açar sözlər: *operator-diferensial tənlik, Hilbert fəzası, çoxluq, vektor-funksiya, izomorf, norma, öz-özünə qoşma operator, aralıq törəmə, requlyar həll.*

Mustafayev S. M.
Doctor of Philosophy in Physics and Mathematics, Associate Professor, Mingachevir State University

Ismailova M. F.
Doctor of Philosophy in Mathematics, Associate Professor, Mingachevir State University

On some estimates of the norms of operators of operator-differential equations in private high-order derivatives

Abstract

Algebraic conditions are found that ensure the existence and uniqueness of a regular solution in the entire space R^2*. These conditions are expressed in terms of the coefficients of the given operator-differential equation. Estimates are obtained for the norms of operators of intermediate derivatives in spaces of Sobolev type. These estimates are linked by the conditions for the solvability of the equations. In the article, it is proved that the operator* P_0 *is continuous and realizes an isomorphism between spaces* $W_2^n\left(R^2;H\right)$ *and* $L_2\left(R^2;H\right)$

Keywords: *operator-differential equation, Hilbert space, set, vector function, isomorph, norms, self-adjoint operator, intermediate derivatives, regular solution.*