TƏBİƏT VƏ TEXNİKA ELMLƏRİ BÖLMƏSİ

MSC 26A33, 42B35, 46E30

ÜMUMİLƏŞMİŞ NİKOLSKİ-MORRİ FƏZALARINDA RİSS-TORİN TİPLİ TEOREMLƏR

Alik Malik oğlu Nəcəfov
fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor
AMEA-nın Riyaziyyat və Mexanika İnstitutu

Rövşən Fərrux oğlu Babayev
Mingəçevir Dövlət Universiteti

Xülasə
Məqalədə inteqral şəklində göstərilməsi üsulu ilə ümumiləşmiş Nikolski-Morri tipli fəzalardan olan funksiyalar üçün Ris-Torin tipli teoremlər isbat olunur. Bu fəzaların kəsişməsi daxil olan funksiyaların ümumiləşmiş qarışıq törəmələri üçün L_q fəzasında verilən metrika mənasında Hölder şərti tədqiq edilir.

Açar sözlər: *ümumiləşmiş Nikolski-Morri tipli fəza, Riss-Torin tipli teoremlər, qarışıq törəmələr, Hölder şərti*

Giriş

Bu məqalədə [2] işində daxil olunan ümumiləşmiş Nikolski-Morri

$$\bigcap_{i=0}^{n} L^{<l^{i,\mu}>}_{p^i_\mu,\varphi,\beta}(G_\varphi) \qquad (\mu=1,2,...,M) \tag{1}$$

fəzalarının kəsişməsinə daxil olan funksiyaların bir sıra diferensial və diferensial-fərq xassələri öyrənilir. Başqa sözlə, (1) fəzasından olan, "çevik φ-buynuz" şərtini ödəyən n-ölçülü oblastlarda təyin olunmuş funksiyaların $D^\nu f$ zəif qarışıq törəmələri üçün Riss-Torin tipli teoremlər isbat olunur.

Bundan başqa, həmçinin həmin zəif qarışıq törəmələrin L_q-də verilən metrika mənada ümumiləşmiş Hölder şərtini ödəməsi öyrənilir.

Parametrli fəzalara ilk dəfə Morrinin işində [6] elliptik tip tənliyin həllinin hamarlıq məsələsinin öyrənilməsi zamanı baxılmışdır. Sonralar bu fəzalar Lebeq-Morri-$L_{p,\lambda}(R^n)$ adlandırılmış və bir çox riyaziyyatçılar tərəfindən, o cümlədən, V.P.İlin [8], İ.Ross [3], V.S.Quliyev [4], A.Maccukato [5], Y.Savano [7], A.M.Nəcəfov [1] və başqaları tərəfindən öyrənilərək inkişaf etdirilmişdir.

Tutaq ki, $G\subset R^n$, $\varphi(t)=(\varphi_1(t),\varphi_2(t),...,\varphi_n(t))$, $\varphi_j(t)>0$ $(t>0)$ vektor-funksiyaları G oblastında Lebeq mənada ölçüləndir və $\lim\limits_{t\to+0}\varphi_j(t)=0$, $\lim\limits_{t\to+\infty}\varphi_j(t)=K_j\le\infty$ $(j=1,2,...,n)$. Belə vektor-funksiyalar çoxluğunu A ilə işarə edək.

Fərz edək ki, $m^i=(m^i_1,...,m^i_n)$, $m^i_j\in N$, $k^i=(k^i_1,...,k^i_n)$, $k^i_j\in N_0$ $(j\ne 1,2,...,n;\ i=0,1,...,n)$; $l^i=(l^i_1,...,l^i_n)$, $l^0_j\ge 0$, $l^i_j\ge 0$ $(i\ne j=1,2,...,n)$, $l^i_i>0$ $(i=1,2,...,n)$.

Tərif. [2] $G\subset R^n$ oblastında təyin olunmuş xətti normallaşmış və

$$\|f\|_{\bigcap_{i=0}^{n} L^{<l^i>}_{p^i,\varphi,\beta}(G_\varphi)} = \sum_{i=0}^{n} \sup_{0<t<t_0} \frac{\left\|\Delta^{m^i}(\varphi(t), G_{\varphi(t)}) D_i^{k_i} f\right\|_{p^i,\varphi,\beta}}{\prod_{j=1}^{n} (\varphi_j(t))^{l_j^i - k_j^i}} \tag{2}$$

sonlu normaya malik f funksiyalar çoxluğuna ümumiləşmiş Nikolski-Morri fəzası deyilir və $\bigcap_{i=0}^{n} L^{<l^i>}_{p^i_\mu,\varphi,\beta}(G_\varphi)$ kimi işarə olunur.

Burada

$$\|f\|_{p^i,\varphi,\beta;G} = \|f\|_{L_{p^i,\varphi,\beta}(G)} = \sup_{\substack{x\in G;\\ t>0}} \left(|\varphi([t]_1)|^{-\beta} \|f\|_{p,G_{\varphi(t)}(x)} \right), \tag{3}$$

$1 \le p^i \le \infty$, $|\varphi([t]_1)|^{-\beta} = \prod_{j=1}^{n} (\varphi_j([t]_1))^{-\beta_j}$, $\beta_j \in [0,1]$ $(j-1,2,...,n)$; $[t]_1 = \min\{1,t\}$ və hər bir $x \in R^n$ üçün $G_{\varphi(t)}(x) = G \cap I_{\varphi(t)}(x) = G \cap \{y : |y_j - x_j| < \frac{1}{2}\varphi_j(t),\ \ j = 1,2,...,n\}$.

Tutaq ki, $\lambda_\mu \ge 0$ $(\mu = 1,2,...,M)$, $\sum_{\mu=1}^{m} \lambda_\mu = 1$, $\frac{1}{p} = \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\lambda_\mu}{p_\mu}$, $\frac{1}{p^i} = \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\lambda_\mu}{p^i_\mu}$, $\frac{1}{r} = \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\lambda_\mu}{r_\mu}$, $l^i = \sum_{\mu=1}^{m} \lambda_\mu l^{i,\mu}$ və $M(\cdot,y) \in C_0^\infty(R^n)$, elədir ki, $S(M) = \operatorname{supp} M \subset I_{\varphi(t)} = \{y : |y_j| < \frac{1}{2}\varphi_j(T),\ \ j = 1,2,...,n\}$ istənilən $0 < T \le 1$ və fərz edək ki, $V = \bigcup_{0<t\le T} \left\{ y : \frac{y}{\varphi(t)} \in S(M) \right\}$.

$V \subset I_{\varphi(T)}$ və $U + V \subset G$ olduğunu fərz edək, bu U çoxluğu qapanması ilə G oblastına daxil olan çoxluqdur, yəni $\overline{U} \subset G_0$. Əlavə olaraq fərz edək ki, $\varphi_j(t)$ $(j = 1,2,...,n)$ funksiyaları $[0,T]$-da differensiallanandır.

Lemma. Fərz edək ki, $1 \le p^i_\mu \le p_\mu \le r_\mu \le \infty$ $(i = 0,1,...,n;\ \mu = 1,2,...,M)$; $0 < \eta,\ t \le T \le 1$; $\nu = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n)$, $\nu_j \ge 0$, $(j = 1,2,...,n)$ tam ədədlərdir; $\Delta^{m^i}(\varphi(t)) f \in L_{p^i_\mu,\varphi,\beta}(G)$ və

$$F(x) = \prod_{j=1}^{n} (\varphi_j(T))^{\nu_j - 1} \int_{R^n} \int_{-\infty}^{\infty} M\left(\frac{y}{\varphi(T)}, \frac{\rho(\varphi(T),x)}{\varphi(T)} \right) \times$$

$$\times \zeta^0\left(\frac{u}{\varphi(T)}, \frac{\rho_i(\varphi_i(T),x)}{2\varphi(T)}, \frac{1}{2}\rho'(\varphi(T),x) \right) \times \Delta^{m^0}(\varphi(\delta)u) f(x+y+u)\, dy\, du \tag{4}$$

$$F^i_\eta(x) = \int_0^\eta L^i(x,t) \prod_{j=1}^{n} (\varphi_j(t))^{-\nu_j - 2} \prod_{j \in e_{l^i}} \frac{\varphi'_j(t)}{\varphi_j(t)}\, dt, \tag{5}$$

$$F^i_{\eta,T}(x) = \int_\eta^T L^{(i)}(x,t) \prod_{j=1}^{n} (\varphi_j(t))^{-\nu_j - 2} \prod_{j \in e_{l^i}} \frac{\varphi'_j(t)}{\varphi_j(t)}\, dt, \tag{6}$$

burada

$$L^{(i)}(x;t)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{R^n} M\left(\frac{y}{\varphi(t)},\frac{\rho(\varphi(t),x)}{\varphi(t)}\right)\zeta^{(i)}\left(\frac{u}{\varphi(t)},\frac{\rho(\varphi(t),x)}{2\varphi(t)},\frac{1}{2}\rho'(\varphi(t),x)\right)\times$$

$$\times\Delta^{m^i}(\varphi(\delta)u)\,f(x+y+u)\,dy\,du \tag{7}$$

Əgər $Q_T^i=\int_0^T\prod_{j=1}^n(\varphi_j(t))^{-\nu_j-(1-\beta_j p)\left(\frac{1}{p^i}-\frac{1}{p}\right)}\prod_{j\in e_{l^i}}\frac{\varphi_j'(t)}{(\varphi_j(t))^{1-\sum_{\mu=1}^M l_j^{i,\mu}\lambda_\mu}}dt<\infty$ olarsa, onda istənilən $\bar{x}\in U$ üçün aşağıdakı bərabərsizliklər doğrudur:

$$\sup_{\bar{x}\in U}\|F\|_{p,U_{\psi(\xi)}(\bar{x})}\le C_1\prod_{\mu=1}^M\left\{\left\|\prod_{j=1}^n(\varphi_j(T))^{-l_j^{0,\mu}}\Delta^{m^0}(\varphi(T),G_{\varphi(T)})f\right\|_{p_\mu^0,\varphi,\beta}\right\}^{\lambda_\mu}\times$$

$$\times\prod_{j=1}^n(\varphi_j(T))^{l_j^0-\nu_j-(1-\beta_j p^0)\left(\frac{1}{p^0}-\frac{1}{p}\right)}\prod_{j=1}^n(\psi_j([\xi]_1))^{\beta_j\frac{p^0}{p}}, \tag{8}$$

$$\sup_{\bar{x}\in U}\|F_\eta^i\|_{p,U_{\psi(\xi)}(\bar{x})}\le C_2\prod_{\mu=1}^M\left\{\left\|\prod_{j=1}^n(\varphi_j(t))^{-l_j^{i,\mu}}\Delta^{m^i}(\varphi(t),G_{\varphi(T)})f\right\|_{p_\mu^i,\varphi,\beta}\right\}^{\lambda_\mu}\times|Q_T^i|\prod_{j=1}^n(\psi_j([\xi]_1))^{\beta_j\frac{p^i}{p}}, \tag{9}$$

$$\sup_{\bar{x}\in U}\|F_{\eta,T}^i\|_{p,U_{\psi(\xi)}(\bar{x})}\le C_3\prod_{\mu=1}^M\left\{\left\|\prod_{j=1}^n(\varphi_j(t))^{-l_j^{i,\mu}}\Delta^{m_i}(\varphi(t),G_{\varphi(T)})f\right\|_{p_\mu^i,\varphi,\beta}\right\}\times|Q_{\eta,T}^i|\prod_{j=1}^n(\psi_j([\xi]_1))^{\beta_j\frac{p^i}{p}}, \tag{10}$$

burada $U_{\psi(\xi)}(\bar{x})=\left\{x:|x_j-\bar{x}_j|<\frac{1}{2}\psi_j(\xi),\quad j=1,2,...,n\right\}$, $\psi\in A$ və C_1,C_2,C_3 sabitləri $\varphi,\ \xi,\ \eta,\ T$ -dən asılı olmayan müsbət ədədlərdir.

İsbatı: İsbatı $\bar{x}\in U$ üçün ümumiləşmiş Minkovski bərabərsizliyini tətbiq edərək

$$\|F_\eta^i\|_{p,U_{\psi(\xi)}(\bar{x})}\le\int_0^\eta\|L^i(\cdot,t)\|_{p,U_{\psi(\xi)}(\bar{x})}\prod_{j=1}^n(\varphi_j(t))^{-\nu_j-2}\prod_{j\in e^i}\frac{\varphi_j'(t)}{\varphi_j(t)}dt, \tag{11}$$

alarıq. $\|L^i(\cdot,t)\|_{p,U_{\psi(\xi)}(\bar{x})}$ normasını qiymətləndirək. $\alpha_\mu=\frac{p_\mu}{\lambda_\mu p}$, $\mu=1,2,...,M$ $\left(\sum_{\mu=1}^M\frac{1}{\alpha_\mu}=\frac{1}{p}\sum_{\mu=1}^M\frac{\lambda_\mu}{p_\mu^i}=1\right)$ qüvvətlərinə nəzərən Hölder bərabərsizliyini $|L^i(x,t)|$ üçün tətbiq edərək,

$$\|L^i(\cdot,t)\|_{p,U_{\psi(\xi)}(\bar{x})}\le C_1\prod_{\mu=1}^M\left\{\|L^i(\cdot,t)\|_{p_\mu,U_{\psi(\xi)}(\bar{x})}\right\}^{\lambda_\mu} \tag{12}$$

münasibətini alarıq. Yenidən $p_\mu\le r_\mu$ $(\mu=1,2,...,m)$ halı üçün Hölder bərabərsizliyini tətbiq edərək

$$\|L^i(\cdot,t)\|_{p_\mu,U_{\psi(\xi)}(\bar{x})}\le\prod_{j=1}^n(\psi_j(\xi))^{\frac{1}{p_\mu}-\frac{1}{r_\mu}}\|L^i(\cdot,t)\|_{r_\mu,U_{\psi(\xi)}(\bar{x})} \tag{13}$$

bərabərsizliyini alarıq. İndi $\left\|L^i(\cdot,t)\right\|_{\kappa_1,U_{\psi(\xi)}(\bar{x})}$ normasını qiymətləndirək. Tutaq ki, χ funksiyası $S(L^i)$ çoxluğunun xarakteristik funksiyasıdır. (7) bərabərliyi ilə təyin olunan $L^i(x,t)$ funksiyasına $1\le p_\mu^i \le r_\mu \le \infty,\ s_\mu \le r_\mu,\ \frac{1}{s_\mu}=1-\frac{1}{p_\mu^i}+\frac{1}{r_\mu}\ (\mu=1,2,...,M)$ halında

$$\left\|L^i(\cdot,t)\right\|_{r_\mu,U_{\psi(\xi)}(\bar{x})} \le C \sup_{x\in U_{\psi(\xi)}(x)} \left(\int_{R^n} \left| \int_{-\infty}^{\infty} |\zeta^i(...)| \left|\Delta^{m^i}(\varphi(\delta)u)\, f(x+y+u)\right| du \right|^{p_\mu^i} \chi\left(\frac{y}{\varphi(t)}\right) dy \right)^{\frac{1}{p_\mu^i}-\frac{1}{r_\mu}} \times$$

$$\le C \sup_{y\in V} \left(\int_{U_{\psi(\xi)}(\bar{x})} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \zeta^i\left(\frac{u}{\varphi(t)}, \frac{\rho(\varphi(t),x)}{2\varphi(t)}, \frac{1}{2}\rho'(\varphi(t),x)\right) \Delta^{m^i}(\varphi(\delta)u)\, f(x+y+u)\, du \right|^{\frac{1}{p_\mu^i}} dx \right)^{\frac{1}{r_\mu}} \times$$

$$\times \left(\int_{R^n} \left| \widetilde{M}\left(\frac{y}{\varphi(t)}\right) \right|^{s_\mu} dy \right)^{\frac{1}{s_\mu}} \tag{14}$$

alarıq. $M(\cdot,y,z)$ funksiyası isə sanki hər bir $(y,z)\in R^n\times R^n$ üçün $|M(x,y,z)|\le C|\widetilde{M}(x)|$ şərtini ödəyir və $\widetilde{M}\in C_0^\infty(R^n)$ olduğunu fərz edək.

İstənilən $x\in U$ üçün

$$\int_{R^n} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \zeta^i\left(\frac{u}{\varphi(t)}, \frac{\rho(\varphi(t),x)}{2\varphi(t)}, \frac{1}{2}\rho'(\varphi(t),x)\right) \Delta^{m^i}(\varphi(\delta)u)\, f(x+y+u)\, du \right|^{p_\mu^i} \chi\left(\frac{y}{\varphi(t)}\right) dy \le$$

$$\le \int_{(U+V)_{\varphi(t)}(\bar{x})} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \zeta^i(*) \Delta^{m^i}(\varphi(\delta)u)\, f(y+u)\, du \right|^{p_\mu^i} dy \le \int_{G_{\varphi(t)}(\bar{x})} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \zeta^i(*) \Delta^{m^i}(\varphi(\delta)u)\, f(y+u)\, du \right|^{p_\mu^i} dy \le$$

$$\le \prod_{j=1}^{n} (\varphi_j(t))^{l_j^{i,\mu} p_\mu^i} \left\| \prod_{j=1}^{n} (\varphi_j(t))^{-l_j^{i,\mu}} \Delta^{m^i}(\varphi(t), G_{\varphi(t)})\, f \right\|_{p_\mu^i G_{\varphi(t)}(z)}^{p_\mu^i} \le$$

$$\le \prod_{j=1}^{n} (\varphi_j(t))^{l_j^{i,\mu}, p_\mu^i} \left\| \prod_{j=1}^{n} (\varphi_j(t))^{-l_j^{i,\mu}} \Delta^{m^i}(\varphi(t), G_{\varphi(t)})\, f \right\|_{p_\mu^i,\varphi,\beta}^{p_\mu^i} \prod_{j=1}^{n} (\varphi_j(t))^{\beta_j, p_\mu^i}, \tag{15}$$

hər bir $y\in V$ üçün

$$\int_{U_{\psi(\xi)}(\bar{x})} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \zeta^i\left(\frac{u}{\varphi(t)}, \frac{\rho(\varphi(t),x)}{2\varphi(t)}, \frac{1}{2}\rho'(\varphi(t),x)\right) \Delta^{m^i}(\varphi(\delta)u)\, f(x+y+u)\, du \right|^{p_\mu^i} dx \le$$

$$\le \int_{(U+V)_{\psi(\xi)}(\bar{x}+y)} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \zeta^i(*) \Delta^{m^i}(\varphi(\delta)u)\, f(x+u)\, du \right|^{p_\mu^i} dx \le$$

$$\le \prod_{j=1}^{n}(\varphi_j(t))^{l_j^{i,\mu},p_\mu^i}\left\|\prod_{j=1}^{n}(\varphi_j(t))^{-l_j^{i,\mu}}\Delta^{m^i}(\varphi(t),G_{\varphi(t)})\,f\right\|_{p_\mu^i,\varphi,\beta}^{p_\mu^i}\prod_{j=1}^{n}(\psi_j([\xi]_1))^{\beta_j,p_\mu^i}\le$$

$$\le \prod_{j=1}^{n}(\varphi_j(t))^{l_j^{i,\mu},p_\mu^i}\left\|\prod_{j=1}^{n}(\varphi_j(t))^{-l_j^{i,\mu}}\Delta^{m^i}(\varphi(t),G_{\varphi(t)})\,f\right\|_{p_\mu^i,\varphi,\beta}^{p_\mu^i}\times\prod_{j=1}^{n}(\psi_j([\xi]_1))^{\beta_j,p_\mu^i},\quad (U+V)_{\psi(\xi)}\subset G_{\varphi(t)},\tag{16}$$

$$\int_{R^n}\left|\widetilde{M}\left(\frac{y}{\varphi(t)}\right)\right|^{s_\mu}dy=\left\|\widetilde{M}\right\|_{s_\mu}^{v}\prod_{j=1}^{n}(\varphi_j(t))\tag{17}$$

münasibətlərini alarıq.

(15)-(17) münasibətlərini (14) bərabərsizliyində nəzərə alsaq, onda

$$\left\|L^i(\cdot,t)\right\|_{r_\mu,U_{\psi(\xi)}(\bar{x})}\le\left\|\widetilde{M}\right\|_{s_\mu}\cdot\left\|\prod_{j=1}^{n}(\varphi_j(t))^{-l_j^{i,\mu}}\Delta^{m^i}(\varphi(t),G_{\varphi(t)})\,f\right\|_{p_\mu^i,\varphi,\beta}\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{n}(\varphi_j(t))^{\frac{1}{s_\mu}+\beta_j p^i\left(\frac{1}{p^i}-\frac{1}{r}\right)}\prod_{j=1}^{n}(\psi_j([\xi]_1))^{\frac{\beta_j p^i}{r}},\tag{18}$$

(11), (12) bərabərsizliklərinin köməyi ilə $r_\mu = p_\mu\ (\mu=1,2,...,M)$ və hər bir $\bar{x}\in U$ üçün (9) bərabərsizliyini alırıq:

$$\sup_{\bar{x}\in U}\left\|F_\eta^i\right\|_{p,U_{\psi(\xi)}(\bar{x})}\le C_2\prod_{\mu=1}^{M}\left\{\left\|\prod_{j=1}^{n}(\varphi_j(t))^{-l_j^{i,\mu}}\Delta^{m^i}(\varphi(t),G_{\varphi(T)})\,f\right\|_{p_\mu^i,\varphi,\beta}\right\}^{\lambda_\mu}\times|Q_T^i|\prod_{j=1}^{n}(\psi_j([\xi]_1))^{\beta_j\frac{p^i}{p}}.$$

Eyni yolla (8) və (10) bərabərsizliklərini alarıq.

Nəticə: (8)-(10) bərabərsizliklərdən

$$\left\|F\right\|_{p,\psi,\beta;U}\le C^1\prod_{\mu=1}^{M}\left\{\left\|\prod_{j=1}^{n}(\varphi_j(t))^{-l_j^{0,\mu}}\Delta^{m^0}(\varphi(t),G_{\varphi(T)})\,f\right\|_{p_\mu^0,\varphi,\beta}\right\}^{\lambda_\mu},\tag{19}$$

$$\left\|F_\eta^i\right\|_{p,\psi,\beta;U}\le C^2\prod_{\mu=1}^{M}\left\{\left\|\prod_{j=1}^{n}(\varphi_j(t))^{-l_j^{i,\mu}}\Delta^{m^i}(\varphi(t),G_{\varphi(T)})\,f\right\|_{p_\mu^i,\varphi,\beta}\right\}^{\lambda_\mu},\tag{20}$$

$$\left\|F_{\eta,T}^i\right\|_{p,\psi,\beta;U}\le C^3\prod_{\mu=1}^{M}\left\{\left\|\prod_{j=1}^{n}(\varphi_j(t))^{-l_j^{i,\mu}}\Delta^{m^i}(\varphi(t),G_{\varphi(T)})\,f\right\|_{p_\mu^i,\varphi,\beta}\right\}^{\lambda_\mu}.\tag{21}$$

Əsas nəticələr

İndi $\bigcap_{i=0}^{n}L_{p_\mu,\varphi,\beta}^{<l^{i,\mu}>}(G_\varphi),\ \mu=1,2,...,M$ fəzalarının kəsişməsinə daxil olan funksiyaların bir sıra diferensial xassələri haqqında iki teoremi isbat edək.

Teorem 1. Tutaq ki, $G \subset R^n$ "çevik φ-buynuz" çərtini ödəyir [Naj Rus]; $1 \le p^i_\mu \le p_\mu \le \infty$ $(\mu = 1,2,...,M)$; $\nu = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n)$, $\nu_j \ge 0$, $(j = 1,2,...,n)$ tamdırlar; $\nu_j \ge l^0_j$, $\nu_j \ge l^i_j$ $(j \ne i = 1,2,...,n)$, $\nu_i < l^i_i$ $(i = 1,2,...,n)$; $Q^i_T < \infty$ $(i = 1,2,...,n)$, və $f \in \bigcap_{\mu=1}^{M} \bigcap_{i=0}^{n} L^{<l^{i,\mu}>}_{p^i_\mu, \varphi, \beta}(G_\varphi)$.

Onda aşağıdakı daxilolma faktı doğrudur $D^\nu : \bigcap_{\mu=1}^{M} \bigcap_{i=0}^{n} L^{<l^{i,\mu}>}_{p^i_\mu, \varphi, \beta}(G_\varphi) \to L_{p,\psi,\beta_1}(G)$, daha doğrusu, $f \in \bigcap_{\mu=1}^{M} \bigcap_{i=0}^{n} L^{<l^{i,\mu}>}_{p^i_\mu, \varphi, \beta}(G_\varphi)$ üçün $D^\nu f$ ümumiləşmiş qarışıq törəmələri var və aşağıdakıları doğrudur

$$\left\| D^\nu f \right\|_{p,G} \le C^1 \sum_{i=0}^{n} | H^i_T | \prod_{\mu=1}^{M} \left\{ \left\| \prod_{j=1}^{n} (\varphi_j(t))^{-l^{i,\mu}_j} \Delta^{m^i} (\varphi(t), G_{\varphi(T)}) f \right\|_{p^i_\mu, \varphi, \beta} \right\}^{\lambda_\mu}, \tag{22}$$

$$\left\| D^\nu f \right\|_{p,\psi,\beta_1;G} \le C^2 \prod_{\mu=1}^{M} \left\{ \| f \|_{\bigcap_{i=0}^{n} L^{<l^{i,\mu}>}_{p^i_\mu, \varphi, \beta}(G)} \right\}^{\lambda_\mu}, \qquad p^i \le p < \infty. \tag{23}$$

Xüsusi halda, əgər $Q^i_{T,0} = \int_0^T \prod_{j=1}^{n} (\varphi_j(t))^{-\nu_j - (1-\beta_j p^i)\frac{1}{p^i}} \prod_{j \in e^{l^i}} \frac{\varphi'_j(t) dt}{(\varphi_j(t))^{1 - \sum_{\mu=1}^{M} l^{i,\mu}_j \lambda_\mu}} < \infty$, $i = 1,2,...,n$ olarsa,

$D^\nu f(x)$ G oblastında kəsilməzdir və

$$\sup_{x \in G} | D^\nu f(x) | \le C^1 \sum_{i=0}^{n} | H^i_{T,0} | \prod_{\mu=1}^{M} \left\{ \left\| \prod_{j=1}^{n} (\varphi_j(t))^{-l^{i,\mu}_j} \Delta^{m^i} (\varphi(t), G_{\varphi(T)}) f \right\|_{p^i_\mu, \varphi, \beta} \right\}^{\lambda_\mu}, \tag{24}$$

burada $H^i_T = \begin{cases} H^0_T = \prod_{j=1}^{n} (\varphi_j(T))^{-\nu_j - (1-\beta_j p^0)\left(\frac{1}{p^0} - \frac{1}{p}\right)}, & \nu = 0 \\ Q^i_T, & i = 1,2,...,n \end{cases}$

$$\left(H^i_{T,0} = \begin{cases} H^0_{T,0} = \prod_{j=1}^{n} (\varphi_j(T))^{-\nu_j - (1-\beta_j p^0)\frac{1}{p^0}}, & \nu = 0 \\ Q^i_{T,0}, & i = 1,2,...,n \end{cases} \right)$$

$0 < T \le \min\{1, T_0\}$, T_0 qeyd olunmuş müsbət ədəddir, C^1 və C^2 sabitləri f-dən, C^1 sabiti həmçinin T-dən asılı olmayan müsbət ədədlərdir.

İsbatı: Əvvəlcə qeyd edək ki, bu teoremin şərtləri daxilində $f \in \bigcap_{\mu=1}^{M} \bigcap_{i=0}^{n} L^{<l^{i,\mu}>}_{p^i_\mu, \varphi, \beta}(G_\varphi)$ üçün $D^\nu f$ ümumiləşmiş qarışıq törəmələri var. Doğurdan da, $Q^i_T < \infty$ $(i = 1,2,...,n)$ şərtindən hər bir

$$f \in \bigcap_{\mu=1}^{M}\bigcap_{i=0}^{n} L^{<l^{i,\mu}>}_{p^i_\mu,\varphi,\beta}(G_\varphi) \to \bigcap_{i=0}^{n} L^{<l^{i,\mu}>}_{p^i_\mu,\varphi,\beta}(G_\varphi) \to \bigcap_{i=0}^{n} L^{<l^{i,\mu}>}_{p^i_\mu} \to L^{<l^{i,\mu}>}_{p^i_\mu}(G_\varphi)$$

üçün $D^\nu f$ ümumiləşmiş qarışıq törəmələri var, $D^\nu f \in L_p(G)$ və sanki hər bir $x \in U \subset G$ üçün aşağıdakı inteqral göstərilişi doğrudur

$$D^\nu f(x) = (-1)^{|\nu|}\prod_{j=1}^{n}(\varphi_j(T))^{-\nu_j-1}\int_{R^n}\int_{-\infty}^{\infty} K^{0,(\nu)}\left(\frac{y}{\varphi(T)}, \frac{\rho(\varphi(T,x))}{\varphi(t)}\right)\times$$
$$\times\zeta^0\left(\frac{u}{\varphi(T)}, \frac{\rho(\varphi(T),x)}{2\varphi(T)}, \frac{1}{2}\rho'(\varphi(T),x)\right)\Delta^{m^0}(\varphi(\delta)u)\times$$
$$\times f(x+y+u_1+...+u_n)dy\,du + \sum_{i=1}^{n}(-1)^{|\nu|}\int_0^T\int_{R^n}\int_{-\infty}^{\infty} K^{i,(\nu)}\left(\frac{y}{\varphi(t)}, \frac{\rho(\varphi(t),x)}{\varphi(t)}\right)\times$$
$$\times\zeta^i\left(\frac{u}{\varphi(t)}, \frac{\rho(\varphi(t),x)}{2\varphi(t)}, \frac{1}{2}\rho'(\varphi(t),x)\right)\zeta^i\left(\frac{u}{\varphi(t)}, \frac{\rho(\varphi(t),x)}{2\varphi(t)}, \frac{1}{2}\rho'(\varphi(t),x)\right)\Delta^{m^i}(\varphi(\delta)u)\times$$
$$\times f(x+y+u_1+...+u_n)dy\,du\prod_{j=1}^{n}(\varphi_j(t))^{-\nu_j-2}\prod_{j\in e_{l^i}}\frac{\varphi_j'(t)}{\varphi_j(t)}dt\,du\,dy \qquad (25)$$

(25) eyniliyindən Minkovski bərabərsizliyinə əsasən

$$\left\|D^\nu f\right\|_{p,G} \le \left\|f^{(\nu)}_{\varphi(T)}\right\|_{p,G} + \sum_{i=1}^{n}\left\|F^i_T\right\|_{p,G} \qquad (26)$$

$$f^{(\nu)}_{\varphi(T)}(x) = (-1)^{|\nu|}\prod_{j=1}^{n}(\varphi_j(T))^{-\nu_j-1}\int_{R^n}\int_{-\infty}^{\infty} K^{0,(\nu)}\left(\frac{y}{\varphi(T)}, \frac{\rho(\varphi(T,x))}{\varphi(t)}\right)\times$$
$$\times\zeta^0\left(\frac{u}{\varphi(T)}, \frac{\rho(\varphi(T),x)}{2\varphi(T)}, \frac{1}{2}\rho'(\varphi(T),x)\right)\Delta^{m^0}(\varphi(\delta)u)f(x+y+u_1+...+u_n)du\,dy$$

alırıq. (8) bərabərsizliyinin köməyi ilə $U = G,\ M = K^{0,(\nu)}$ olduqda $\prod_{j=1}^{n}(\varphi_j(T))^{l^0_j-\nu_j-(1-\beta_j p)\left(\frac{1}{p^0}-\frac{1}{p}\right)}$

$$\left\|F\right\|_{p,G} \le C_1 |H^0_T| \prod_{j=1}^{n}(\psi_j([\xi]_1))^{\beta_j-\frac{p^0}{p}}\prod_{\mu=1}^{M}\left\{\left\|\prod_{j=1}^{n}(\varphi_j(T))^{-l^{0,\mu}_j}\Delta^{m^0}(\varphi(t),G_{\varphi(T)})f\right\|_{p^0_\mu,\varphi,\beta}\right\}^{\lambda_\mu}, \qquad (27)$$

(9) bərabərsizliyinə əsasən $\eta = T,\ U = G,\ M = K^{i;(\nu)}$ üçün

$$\left\|F^i_T\right\|_{p,G} \le C_2 |Q^i_T| \prod_{\mu=1}^{M}\left\{\left\|\prod_{j=1}^{n}(\varphi_j(t))^{-l^{0,\mu}_j}\Delta^{m^0}(\varphi(t),G_{\varphi(T)})f\right\|_{p^i_\mu,\varphi,\beta}\right\}^{\lambda_\mu} \qquad (28)$$

alırıq. (27) və (28) bərabərsizliklərini (26) bərabərsizliyində yerinə yazsaq (22) bərabərsizliyini alırıq. Analoji yolla (19) və (20) bərabərsizliklərinin köməyi ilə (23) bərabərsizliyini alırıq.

Tutaq ki, indi $Q^i_{T,0} < \infty \ (i = 1,2,...,n)$ şərtləri ödənilir. Onda (25) eyniliyinin köməyi ilə (26) bərabərsizliyindən alırıq:

$$\left\| D^\nu f - f^{(\nu)}_{\varphi(T)}(x) \right\|_{\infty,G} \le C^1 \sum_{i=1}^{n} |H^i_{T,0}| \prod_{\mu=1}^{M} \left\{ \frac{\left\| \Delta^{m^i}(\varphi(t), G_{\varphi(T)}) f \right\|_{p^i_\mu,\varphi,\beta}}{\prod_{j=1}^{n} (\varphi_j(t))^{l^{i,\mu}_j}} \right\}^{\lambda_\mu}$$

$T \to 0$ yaxınlaşdıqda axırıncı bərabərdsizliyin sol tərəfi sıfra yaxınlaşır. $f^{(\nu)}_{\varphi(T)}(x)$ funksiyaları G oblastında kəsilməzdir və bu halda $L_\infty(G)$ $\varphi(T)$ fəzasında yığılma müntəzəm yığılma ilə üst-üstə düşdüyündən, $D^\nu f$ limit funksiyaları da G oblastında kəsilməz olacaqdır.

Teorem 1 isbat olundu.

Tutaq ki, γ n-ölçülü vektordur.

Teorem 2. Tutaq ki, Teorem 1-in bütün şərtləri ödənilir. Onda $Q^i_T < \infty \ (i = 1,2,...,\infty)$ halı üçün $D^\nu f$ ümumiləşmiş qarışıq törəmələri G oblastında L_p olan metrika mənada ümumiləşmiş Hölder şərtini ödəyir, başqa sözlə, aşağıdakı bərabərsizliklər doğrudur

$$\left\| \Delta(\gamma, G) D^\nu f \right\|_{p,G} \le C \prod_{\mu=1}^{M} \left\{ \| f \|_{\bigcap_{i=0}^{n} L^{<l^{i,\mu}>}_{p^i_\mu,\varphi,\beta}(G_\varphi)} \right\}^{\lambda_\mu} |R(|\gamma|, \varphi; T)|, \tag{29}$$

burada C sabiti $f, |\gamma|$ və T-dən asılı olmayan müsbət ədəddir. Xüsusi halda, əgər $Q^i_{T,0} < \infty \ (i = 1,2,...,n)$ olarsa, onda

$$\sup_{x \in G} |D^\nu f(x)| \le C \prod_{\mu=1}^{M} \left\{ \| f \|_{\bigcap_{i=0}^{n} L^{<l^{i,\mu}>}_{p^i_\mu,\varphi,\beta}(G_\varphi)} \right\}^{\lambda_\mu} |R_0(|\gamma|, \varphi; T)|, \tag{30}$$

burada $R(|\gamma|, \varphi; T) = \max_i \{ |\gamma|, Q^i_{|\gamma|}, Q^i_{|\gamma|,T} \}$, $(R_0(|\gamma|, \varphi; T) = \max_i \{ |\gamma|, Q^i_{|\gamma|,0}, Q^i_{|\gamma|,T,0} \})$.

İstifadə edilmiş ədəbiyyat

1. Akbulut A., Eroglu A.,.Najafov A.M. Some embedding theorems on the Nikolski-Morrey type spaces // Advances in Analysis, 1, №1, 2016, pp.18-26

2. Babayev R.F. Some differential properties of generalized Nikolski-Morrey type spaces // Caspian Journal of Applied Marhematics, Ecology and economics, v.5, 2, 2017, pp.106-115

3. Ross I. A Morrey-Nikolskii inequality // Proceedings Amer. Math. Soc., 78, 1980, pp.97-102

4. Guliyev V.S. Generalized weighted Morrey spaces and higher order comutators of sublinear operators // Eurasian Math. J., 3, 2012, pp.33-61

5. Mazzucato A.I. Bessov-Morrey spaces. Function space theory and applications to nonlinear PDE // Trans. Amer. Math. Soc., 355, 2002, 1297-1364.

6. Morrey C.B. On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations // Trans. Amer. Math. Soc., 43, 1938, pp.126-166

7. Sawan Y. Identification of the image of Morrey spaces by the fractional integral operators // Proc. A.Razmadze Math. Inst., 149, 2009, pp.87-93

8. Ильин В.П. О некоторых свойствах функций из пространства $W^{l}_{p,a,\chi}(G)$ / записки научного семинара ЛОМИ им. Стеклова, 23, 1971, с.33-40

A.M.Nacafov
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Institute of Mathematics and Mechanics of ANAS

R.F.Babayev
Mingachevir State University

Riesz-Thorin type theorems for functions in generalized Nicholsky-Morrey spaces

Abstract

In the article Riesz-Thorin type theorems for functions from a generalized Nicholsky-Morrey type spaces are provided by a method of integral representation. The Holder condition in the metric sense, given in the space L_q, for generalized mixed derivatives of functions containing the intersection of these spaces is investigated.

Keywords: *generalized Nikolskii-Morrey type space, Riesz-Thorin type theorems, mixed derivatives, Holder condition*

А.М.Наджафов
доктор физико-математических наук, профессор
Институт математики и механики НАНА

Р.Ф.Бабаев
Мингячевирский государственный университет

Теоремы типа Риса-Торина в обобщенных пространствах Никольского-Морри

Резюме

В статье методом интегрального представления доказываются теоремы типа Риса-Торина для функций из обобщенного пространства типа Никольського-Морри. Исследуется условие Гельдера в метрическом смысле, заданном в пространстве L_q, для обобщенных смешанных производных функций, содержащих пересечение этих пространств.

Ключевые слова: *обобщенное пространство типа Никольського-Морри, теоремы типа Рис-Торина, смешанные производные, условие Гельдера*

Daxil olub: 06.09.2021