UOT 512.64

ÜMUMTƏHSİL MƏKTƏBLƏRİNDƏ "ÜSTLÜ TƏNLİKLƏR SİSTEMİNİN HƏLL ÜSULLARI"NIN TƏDRİSİ METODİKASI

Qəhrəman Tapdıq oğlu Kələşov
fizika-riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru,dosent
Mingəçevir Dövlət Universiteti

Natəvan Həmdiyyə qızı Kələşova
Mingəçevir Dövlət Universiteti

Xülasə
Məqalədə riyaziyyatın tədrisində müasir yanaşmalar nəzərə alınmaqla, ümumtəhsil məktəblərində "Üstlü tənliklər sisteminin həll üsulları"nın tədrisi metodikası işlənmiş, eləcə də ədəbiyyatdan məlum olan, lakin orta məktəb dərsliklərində verilməyən bəzi üstlü tənliklər sisteminin həll üsulları araşdırılmışdır. Məqsəd şagirdlərin riyaziyyata marağını artırmaq, onların fənn olimpiadalarında çətinlik dərəcəsi yüksək olan üstlü tənliklər sistemini uğurla həll etmələrinə nail olmaqdır.

Açar sözlər: *riyaziyyat, üstlü tənliklər sistemi, əvəzetmə üsulu, yeni dəyişən daxiletmə üsulu, cəbri toplama üsulu*

Giriş

Üstlü tənliklər sisteminin həll üsulları mövzusu ümumtəhsil məktəblərinin X sinfində tədris edilir [2]. Riyaziyyat fənninin tədris proqramında yuxarıda qeyd olunan mövzunun tədrisinə az saat ayrılmışdır [4]. Buna baxmayaraq, müəllimlər elə çalışmalıdırlar ki, verilən qısa vaxtda şagirdlər üstlü tənliklər sistemini həll üsullarına aid daha çox informasiyaya yiyələnməyə nail olsunlar. Üstlü tənliklər sisteminin həll üsullarını şagirdlərə öyrətmək üçün onlara əvvəlcə üstlü funksiya, üstlü funksiyanın xassələri, sadə və mürəkkəb üstlü tənliklərin həll üsulları öyrədilir və bu anlayışlar haqqında bilik, bacarıq və vərdişlər sistemi möhkəmləndirilir.

Üstlü tənliklər sistemini həll etmək üçün mövcud ədəbiyyatda ümumi qayda yoxdur. Ona görə də üstlü tənliklər sistemini həll etmək üçün, xətti və qeyri-xətti tənliklər sisteminin həllində tətbiq olunan üsullardan geniş istifadə edilir. Belə ki, üstlü tənliklərin əsasları bərabərləşdirilərək sadələşdirilir, sonra əvəzetmə, yeni dəyişən daxiletmə, cəbri toplama üsulları vaistəsilə həll edilir. Yuxarıda qeyd edilən üsulların tətbiqi ilə həll olunan üstlü tənliklər sistemini nəzərdən keçirək.

1. Əvəzetmə üsulu

Bu üsulun mahiyyəti ondan ibarətdir ki, sistemi həll etmək üçün tənliklərin birindən dəyişənin biri digəri vasitəsilə ifadə edilir, alınan ifadəni sistemin digər tənliyində yerinə yazaraq, alınan üstlü tənlik həll edilir. Sonra isə tapılan kökü yerinə yazaraq, ikinci dəyişənin uyğun qiyməti tapılır.

Misal 1. $\begin{cases} x - y = 5 \\ 3^x + 3^y = 732 \end{cases}$ tənliklər sistemini həll edin.

Həlli: Sistemin birinci tənliyindən $x = 5 + y$ kimi tapıb, ikinci tənlikdə yerinə yazaq,

$$\begin{cases} x = 5 + y \\ 3^x + 3^y = 732 \end{cases} \Leftrightarrow 3^{5+y} + 3^y = 732 \Leftrightarrow 3^y\left(3^5 + 1\right) = 732 \Leftrightarrow 3^y = \frac{732}{244} \Leftrightarrow 3^y = 3 \Rightarrow y = 1$$

alınır. Burada y-in qiymətini yerinə yazıb x-i tapaq. $x = 5 + 1 \Rightarrow x = 6$. Beləliklə, tənliklər sisteminin həlli $(6;1)$ cütüdür.

Cavab: $(6\,;1)$.

Misal 2. $\begin{cases} 2^{x-1} + 2^y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$ tənliklər sistemini həll edin və xy hasilini tapın. [1, s.229]

Həlli: $\begin{cases} 2^{x-1} + 2^y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + y \\ 2^{2+y-1} + 2^y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + y \\ 2 \cdot 2^y + 2^y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + y \\ 3 \cdot 2^y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + y \\ 2^y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 3 \end{cases}$; $x \cdot y = 3$ olar.

Cavab: $x = 3$; $y = 1$; $x \cdot y = 3$.

Misal 3. $\begin{cases} 4^x \cdot 7^y = 12{,}25 \\ y - x = 3 \end{cases}$ tənliklər sistemini həll edin və $x^2 + y^2$ cəmini tapın. [1, s.229]

Həlli: $\begin{cases} 4^x \cdot 7^y = 12{,}25 \\ y - x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 + x \\ 4^x \cdot 7^{x+3} = 12{,}25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 + x \\ 343 \cdot 4^x \cdot 7^x = 12{,}25 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} y = 3 + x \\ 28^x = \dfrac{1}{28} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 + x \\ 28^x = 28^{-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$; $x^2 + y^2 = 1 + 4 = 5$ olar.

Cavab: $x = -1$; $y = 2$; $x^2 + y^2 = 5$ -dir.

2. Sistemə daxil olan tənliklərin əsaslarını bərabərləşdirməklə həll edilən tənliklər

Bu üsulun mahiyyəti isə, sistemdəki üstlü tənliklərin hər birinin əsaslrını bərabərləşdirməklə, iki dəyişənli tənliklər sisteminə gətirməkdir.

Misal 4. $\begin{cases} 9^{x+y} = 729 \\ 3^{x-y-1} = 1 \end{cases}$ tənliklər sistemini həll edin. [1, s.229]

Həlli: Sistemə daxil olan tənliklərin hər birinin əsaslarını bərabərləşdirək.

$\begin{cases} (3^2)^{x+y} = 3^6 \\ 3^{x-y-1} = 3^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{2x+2y} = 3^6 \\ 3^{x-y-1} = 3^0 \end{cases}$. Burada x və y-ə nəzərən yeni sistem tənlik alınır. Alınmış yeni tənliyi həll edək.

$\begin{cases} 2(x + y) = 6 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$. Burada x-in qiymətini yerinə yazıb, y-i tapaq. $y = 3 - 2$; $y = 1$. Sistem tənliyin həlli $(2;1)$ cütüdür.

Cavab: $(2\,;1)$.

Misal 5. $\begin{cases} 3^{x-y} = 81 \\ 2^{x-3y+1} = 8 \end{cases}$ sistemi həll edin. [3, s.106]

Həlli: $\begin{cases} 3^{x-y} = 3^4 \\ 2^{x-3y+1} = 2^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 4 \\ x - 3y + 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 4 \\ x - 3y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 + y \\ 4 + y - 3y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 + y \\ -2y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 5 \end{cases}$ alarıq.

Deməli, tənliklər sisteminin həlli $(5\,;1)$ cütü olar.

Cavab: $(5\,;1)$.

Misal 6. $\begin{cases} 4^{x+3y} = 1024 \\ 5^{2x+y-7} = \dfrac{1}{25} \end{cases}$ sistem tənliyini həll edin. [3, s.106]

Həlli: $\begin{cases} 4^{x+3y} = 1024 \\ 5^{2x+y-7} = \dfrac{1}{25} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^{x+3y} = 4^5 \\ 5^{2x+y-7} = 5^{-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y = 5 \\ 2x+y-7 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3y = 5 \\ 2x+y = 5 \end{cases} \left| \begin{matrix} -2 \\ 1 \end{matrix} \right| \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y = 5 \\ -5y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases}$

Tənliklər sisteminin həlli $(2\,;1)$ cütüdür.

Cavab: $(2\,;1)$.

3. Yeni dəyişən daxiletmə üsulu

Bu üsulun mahiyyəti, üstlu tənliklər sistemınə yeni dəyişənlər daxil etməklə, verilən tənliklər sistemini ikidəyişənli tənliklər sisteminə gətirməkdir.

Misal 7. $\begin{cases} 3^x - 3^y = 8 \\ 2\cdot 3^x + 3^y = 19 \end{cases}$ tənliyi həll edin. [3, s.106]

Həlli: Burada $3^x = t\,;\,3^y = z$ əvəzləməsi aparıb sistemdə yerinə yazaq.

$\begin{cases} t - z = 8 \\ 2t + z = 19 \end{cases} \Leftrightarrow 3t = 27 \Rightarrow t = 9\,;\, z = 1$. Alınan qiymətləri tənlikdə yerinə yazaq.

$3^x = 9 \Leftrightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow x = 2\,;\quad 3^y = 1 \Leftrightarrow 3^y = 3^0 \Rightarrow y = 0$.

Misal 8. $\begin{cases} 3^{x+1} + 2^{y-1} = \dfrac{7}{12} \\ 3^{2x+4} + 2^{2y+3} = 3 \end{cases}$ tənliklər sistemini həll edin. [1, s.229]

Həlli: $\begin{cases} 3^{x+1} + 2^{y-1} = \dfrac{7}{12} \\ 3^{2x+4} + 2^{2y+3} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\cdot 3^x + \dfrac{1}{2}\cdot 2^y = \dfrac{7}{12} \\ 81\cdot 3^{2x} + 8\cdot 2^{2y} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 36\cdot 3^x + 6\cdot 2^y = 7 \\ 81\cdot 3^{3x} + 8\cdot 2^{2y} = 3 \end{cases}$

$t = 3^x\,;\ z = 2^y$ əvəzləməsi aparsaq, $\begin{cases} 36t + 6z = 7 \\ 81t^2 + 8z^2 = 3 \end{cases}$ sistemini alarıq. Sistemin birinci tənliyində z və ya t-ni tapıb 2-ci tənlikdə yerinə yazıb sistem tənliyi həll edirik və $t = \frac{1}{9};\ z = \frac{1}{2}$ taparıq. Əvəzləmədə bu qiymətləri nəzərə alsaq,

$\begin{cases} 3^x = \dfrac{1}{9} \\ 2^x = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$ alarıq.

Deməli, $(-2\,;-1)$ cütü sistem tənliyin həlli olar.

Cavab: $(-2\,;-1)$.

Misal 9. $\begin{cases} 9^x \cdot 4^{x+y} = 72 \\ 4^x \cdot 9^{x+y} = 108 \end{cases}$ sistem tənliyini həll edin. [1, s.229]

Həlli: $\begin{cases} 9^x \cdot 4^{x+y} = 72 \\ 4^x \cdot 9^{x+y} = 108 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9^x \cdot 4^x \cdot 4^y = 72 \\ 4^x \cdot 9^x \cdot 9^y = 108 \end{cases}$. Tərəf-tərəfə bölsək,

$$\begin{cases} 36^x \cdot 4^y = 72 \\ \dfrac{4^y}{9^y} = \dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 36^x \cdot 4^y = 72 \\ \left(\dfrac{2}{3}\right)^{2y} = \dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{2} \\ 36^x = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Deməli, $\left(1\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$ cütü sistem tənliyin həllidir.

Cavab: $\left(1\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$.

Misal 10. $\begin{cases} 2^{x+1} \cdot 3^y = 36 \\ 2^{y+1} \cdot 3^x = 24 \end{cases}$ sistem tənliyi həll edin. [1, s.229]

Həlli: $\begin{cases} 2^{x+1} \cdot 3^y = 36 \\ 2^{y+1} \cdot 3^x = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot 2^x \cdot 3^y = 36 \\ 2 \cdot 2^y \cdot 3^x = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 18 \\ 2^y \cdot 3^x = 12 \end{cases}$,

tərəf-tərəfə bölsək:

$$\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 18 \\ \left(\dfrac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^y = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 18 \\ \left(\dfrac{3}{2}\right)^{y-x} = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 18 \\ y - x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 + x \\ 2^x \cdot 3^{1+x} = 18 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 + x \\ 6^x \cdot 3 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 + x \\ 6^x = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

$(1\,;\,2)$ cütü sistem tənliyin həllidir.

Cavab: $(1\,;\,2)$.

4. Cəbri toplama üsulu

Bu üsulla sistem tənliyi həll etmək üçün, sistemin tənliklərinin əmsalları elə ədədlərə vurulur ki, dəyişənlərdən birinin əmsalları əks ədədlərə çevrilir. Bundan sonra alınan tənlikləri tərəf-tərəfə toplayıb, alınan bir dəyişənli üstlü tənlik həll edilir. Sonra isə dəyişənin tapdığımız qiymətini sistemin tənliklərindən birində yerinə yazıb, ikinci dəyişənin uyğun qiyməti tapılır.

Misal 11. $\begin{cases} 3^x - 2^{x+y} = 1 \\ 3^{x+1} - 2^{x+y} = 19 \end{cases}$ sistem tənliyini həll edin. [3, s.106]

Həlli: Sistemin birinci tənliyini (-1)-ə vurub ikinci tənliklə tərəf-tərəfə toplayaq:

$$\begin{cases} -3^x + 2^{x+y} = -1 \\ 3^{x+1} - 2^{x+y} = 19 \end{cases} \Rightarrow 3^{x+1} - 3^x = 18 \Leftrightarrow 3^x(3-1) = 18 \Leftrightarrow 3^x = 9 \Leftrightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow x = 2.$$

Burada $x = 2$ qiymətini sistemin birinci tənliyində yerinə yazsaq,

$$3^2 - 2^{2+y} = 1 \Leftrightarrow 9 - 2^{2+y} = 1 \Leftrightarrow 2^{2+y} = 8 \Leftrightarrow 2^{2+y} = 2^3 \Leftrightarrow 2 + y = 3 \Rightarrow y = 1$$

Deməli, verilən tənliklər sisteminin həlli $(2\,;\,1)$ cütüdür.

Cavab: $(2\,;\,1)$.

Misal 12. $\begin{cases} 5\cdot 2^x + 4\cdot 3^y = 14{,}5 \\ 3\cdot 2^{x+1} + 3^y = 6 \end{cases}$ tənliklər sistemini həll edin. [3, s.106]

Həlli: $\begin{cases} 5\cdot 2^x + 4\cdot 3^y = 14{,}5 \\ 3\cdot 2^{x+1} + 3^y = 6 \end{cases} \left|\begin{matrix} 1 \\ -4 \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} 5\cdot 2^x + 4\cdot 3^y = 14{,}5 \\ -24\cdot 2^x - 4\cdot 3^y = -24 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5\cdot 2^x + 4\cdot 3^y = 14{,}5 \\ -19\cdot 2^x = -9{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{5}{2} + 4\cdot 3^y = 14{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 2^{-1} \\ 3^y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Tənliklər sisteminin həlli $(-1\,;\,1)$ cütüdür.

Cavab: $(-1\,;\,1)$.

Misal 13. $\begin{cases} 5\cdot 4^x + 2\cdot 3^y = 38 \\ 2\cdot 4^x + 4\cdot 3^y = 44 \end{cases}$ tənliklər sistemini həll edin. [3, s.106]

Həlli: $\begin{cases} 5\cdot 4^x + 2\cdot 3^y = 38 \\ 2\cdot 4^x + 4\cdot 3^y = 44 \end{cases} \left|\begin{matrix} -2 \\ 1 \end{matrix}\right| \Leftrightarrow \begin{cases} -10\cdot 4^x - 4\cdot 3^y = -76 \\ 2\cdot 4^x + 4\cdot 3^y = 44 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4^x + 2\cdot 3^y = 22 \\ -8\cdot 4^x = -32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^x = 4 \\ 4 + 2\cdot 3^y = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^x = 4 \\ 3^y = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}.$$

$(1\,;\,2)$ cütü tənliklər sisteminin həllidir.

Cavab: $(1\,;\,2)$.

İstifadə edilmiş ədəbiyyat

1. Gülməmmədov M.Y. Riyaziyyatdan çalışmaların həll metodları. Bakı: Maarif, 1990, 480 s.
2. Qəhrəmanova N., Kərimov M., Hüseynov İ. Riyaziyyat 10. Bakı: Radius, 2017, 320 s.
3. Məmmədov R., Xəlilov H., Hüseynov Ş. Tənliklər və bərabərsizliklər. Bakı: Maarif, 1991, 350 s.
4. Orta məktəbin X-XI siniflər üzrə riyaziyyat proqramı. Bakı: Təhsil İnstitutu, 2019, 14 s.

G.T.Kalashov
Doctor of Philosophy in Physics and Mathematics, Associate Professor
Mingachevir State University

N.H.Kalashova
Mingachevir State University

Teaching methodology of “Methods for solving a system of exponential equations” in secondary schools

Abstract

Taking into account modern approaches to the teaching of mathematics, the article develops a teaching methodology of "System of equations of exponential equations" in secondary schools, as well as methods of solving some systems of exponential equations known in the existing literature but not in secondary school textbooks. The aim was to increase students' interest in the science of mathematics, to easily solve the system of surface equations with a high degree of difficulty in their subject olympiads.

Keywords: *mathematics, system of exponential equations, substitution method, new variable input method, algebraic addition method.*

К.Т.Калашов
доктор философии по физико-математике, доцент
Мингячевирский государственный университет

Н.Г.Калашова
Мингячевирский государственный университет

Методика преподавания «Методы решения систем показательных уравнений» в общеобразовательных школах

Резюме

Принимая во внимание современные подходы к преподаванию математики в статье разработана методика преподавания «Методы решения системы показательных уравнений» в общеобразовательных школах, а также исследованы методы решения некоторых систем показательных уравнений, известных в литературе, но не приводимых в учебниках средней школы. Цель – повысить интерес учащихся к математике, добиться успешного решения ими систем показательных уравнений с высокой степенью сложности на предметных олимпиадах.

Ключевые слова: *математика, система показательных уравнений, метод подстановки, метод ввода новой переменной, метод алгебраического сложения.*

Daxil olub: 14.10.2021